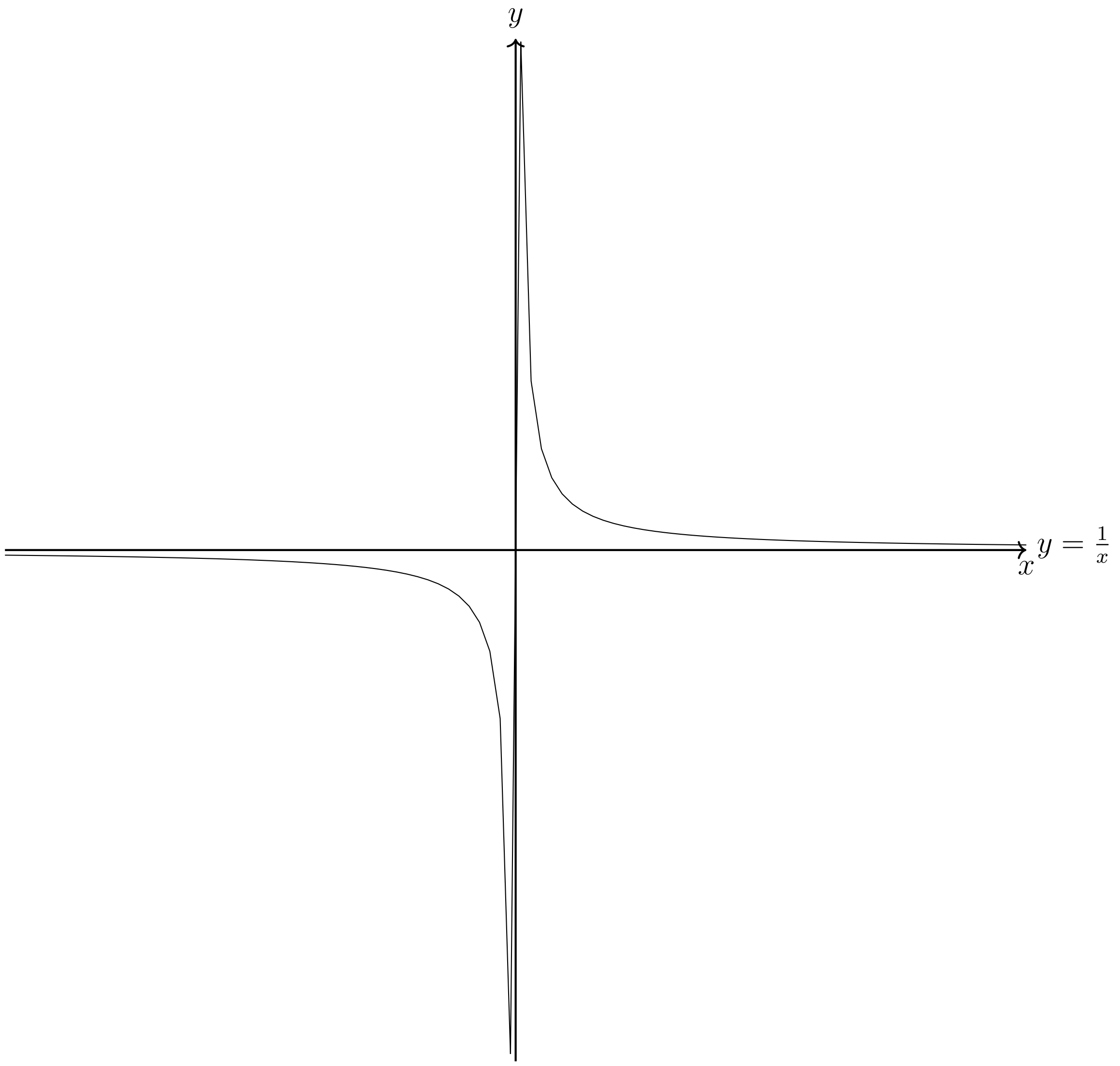
Prontuario di Geometria ed Algebra Lineare



Andrea Albero

Sommario

Premessa

Questo è un semplice elenco di proprietà e passaggi meccanici da eseguire per ottenere determinati risultati in Geometria ed Algebra Lineare. L'obiettivo è spiegare in maniera semplice e veloce i concetti anche e soprattutto ai meno esperti, utilizzando un linguaggio e una formalità decisamente poco rigorosa, senza tuttavia togliere validità a quanto riportato.
Ho compilato questo prontuario durante la preparazione dell'esame al primo anno d'università cui vi ho apportato piccole modifiche in fase di riscrittura, pertanto è visto con occhi da studente per studenti. Ho cercato di fare del mio meglio ma chiaramente non posso escludere errori, che comunque se segnalati correggerò.

1 Strutture Algebriche

1.1 Gruppi

Si definisce **gruppo** rispetto ad un'applicazione **(*)** un'insieme **G** su cui è definita l'operazione interna **(*)** in maniera tale che possegga le seguenti caratteristiche:

1. Associatività nei due sensi
2. Esistenza dell'elemento neutro
3. Esistenza dell'inverso

Se l'operazione **(*)** possiede inoltre la commutatività, il gruppo si definisce Abeliano o Commutativo.

1.2 Gruppo di Sostituzione

Si definisce gruppo di sostituzione l'insieme delle permutazioni possibili nell'insieme.
Uno scambio semplice è l'inversione tra due elementi continui della permutazione.
Uno scambio è la composizione di un numero *dispari* di scambi semplici.
Una sostituzione è la composizione di un numero finito di scambi.
Un'inversione è un cambiamento d'ordine nella successione degli elementi (esempio: 1-3-2 è una inversione, 3-2-1 sono tre inversioni).
Una sostituzione è di classe pari (dispari) se determina un numero pari (dispari) di inversioni.

Una sostituzione pari (dispari) è composizione di un numero pari (dispari) di scambi (semplici o meno).
La classe della composizione di più sostituzioni è uguale al prodotto della classe delle singole sostituzioni.
Pari = +1 Dispari = -1

1.3 Corpi

Si definisce corpo un insieme **G** su cui sono definite le operazioni interne di somma e prodotto.

1. La somma sia
   - commutativa
   - associativa
   - possieda l'elemento neutro
   - possieda l'elemento inverso
   - distributiva

2. La moltiplicazione sia
   - commutativa
   - associativa
   - possieda l'elemento neutro
   - possieda l'elemento inverso

2 Matrici

2.1 Determinante e Caratteristica

Il determinante si può calcolare solo sulle matrici $n \times n$, cioè matrici quadrate.
Un minore di $\mathbf{A}$ è una matrice quadrata ricavata da $\mathbf{A}$
La caratteristica di $\mathbf{A}$ è la dimensione del minore più grande di $\mathbf{A}$ con determinante diverso da 0.
Il fatto che il determinante sia diverso da 0 significa che tutte le colonne della matrice sono linearmente indipendenti, altrimenti ve n'è almeno una linearmente dipendente da un'altra.
Il determinante e la caratteristica non cambiano se aggiungiamo combinazioni linearmente dipendenti di colonne o righe della matrice stessa alle colonne o righe della matrice.
Il determinante della trasposta di $\mathbf{A}$ è uguale al determinante di $\mathbf{A}$. Scambiando due colonne o due righe tra loro si ha che $\mathbf{det}(\mathbf{A}') = -\mathbf{det}(\mathbf{A})$.
La traccia di una matrice quadrata è la **somma** di tutti gli elementi presenti sulla sua diagonale.

2.1.1 Determinante di matrici 3x3: la regola di Sarrus

Nel caso di matrici 3x3, è utile ricordare questa regola grafica per il calcolo del determinante. Si abbia una matrice $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Per il calcolo di $\mathbf{det}(\mathbf{A})$ è sufficiente ricopiare le prime due colonne a fianco della terza *(ottenendo quindi una matrice 5x3)* e tracciare tutte le diagonali possibili:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{bmatrix}$$

Tracciando le diagonali *da in alto a sinistra verso in basso a destra* si ottengono i termini **positivi** del determinante, mentre tracciando le diagonali *da in alto a destra verso in basso a sinistra* si ottengono i termini **negativi**:

$$\mathbf{det}(\mathbf{A}) = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

2.2 Soluzioni

Un sistema in m equazioni ed n incognite ammette soluzione solamente se $\mathbf{car}(\mathbf{A})$ è uguale alla caratteristica della matrice composta da $\mathbf{A}$ più la colonna dei termini noti.
Se un sistema ammette soluzione, questo ammette $\infty^{(n-p)}$ soluzioni, con $n =$ numero delle colonne di $\mathbf{A}$ e $p = \mathbf{car}(\mathbf{A})$.
Per calcolare le soluzioni, si considera un minore che ne determini la caratteristica: prendiamo gli elementi coinvolti in tale minore, e portiamo a secondo membro quelli non coinvolti in tale minore.
Assumendo come parametri gli elementi portati a secondo membro, è teoricamente possibile con la *regola di Cramer* ottenere una singola soluzione per ciascun valore di questi parametri.

2.2.1 La regola di Cramer

Si abbia un sistema lineare di n equazioni in n incognite:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \quad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = c_n \end{cases}$$

scrivibile anche in forma matriciale

$$\mathbf{A} \cdot [\mathbf{x}] = [\mathbf{c}]$$

con $\mathbf{A}$ che risulta essere una matrice quadrata.

Per ottenere la generica radice x_n del sistema, è sufficiente sostituire alla *n-esima* colonna di $\mathbf{A}$ la colonna dei termini noti $[\mathbf{c}]$, e fare il rapporto fra il determinante di questa matrice modificata ed il determinante di $\mathbf{A}$.

Esempio: vogliamo ottenere la radice x_3 del sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \quad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = c_n \end{cases}$$

dove possiamo vedere la matrice $\mathbf{A}$ come disposizione contigua di vettori-coefficienti:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} [\mathbf{A_1}] & [\mathbf{A_2}] & [\mathbf{A_3}] & [\ldots] & [\mathbf{A_n}] \end{vmatrix}$$

Si sostituisce ad $[\mathbf{A_3}]$ la colonna dei termini noti $[\mathbf{c}]$

$$\tilde{\mathbf{A}}_\mathbf{3} = \begin{vmatrix} [\mathbf{A_1}] & [\mathbf{A_2}] & [\mathbf{c}] & [\ldots] & [\mathbf{A_n}] \end{vmatrix}$$

pertanto, grazie alla regola di Cramer, si ottiene

$$x_3 = \frac{det(\tilde{A}_3)}{det(A)}$$

Ovviamente, con lo stesso procedimento, si può ottenere $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

2.2.2 Teorema di Binet

Il teorema di Binet afferma che *il determinante del prodotto di due matrici quadrate dello stesso ordine è uguale al prodotto dei determinanti delle singole matrici*:

$$\mathbf{det(BA)} = \mathbf{det(B)} \cdot \mathbf{det(A)}$$

2.2.3 Teorema di Rouché-Capelli

Il teorema di Rouché-Capelli afferma che un sistema lineare di n equazioni in n incognite:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = c_n \end{cases}$$

ammette soluzione se e solo se $\mathbf{car(A)} = \mathbf{car(A')}$, dove $\mathbf{A'}$ è la matrice $\mathbf{A}$ con l'aggiunta della colonna dei termini noti *(è quindi una matrice $(n+1) \times n$)*:

$$\mathbf{A'} = \begin{vmatrix} [\mathbf{A}] & [\mathbf{c}] \end{vmatrix}$$

2.3 Nucleo, Immagine, Dimensioni

La dimensione dello spazio vettoriale di partenza relativo alla matrice **A** è n, cioè il numero delle colonne.
La dimensione dell'immagine relativa all'operatore f (quindi alla matrice **A**, è la caratteristica p di **A**.
La dimensione del nucleo è $n - car(\mathbf{A}).[(n-p)]$.
Una base di $\mathbf{Im(f)}$ è costituita da un qualsiasi insieme di p vettori corrispondenti a p colonne linearmente indipendenti della matrice **A**.
Una base di **Ker (f)** è trovabile col *teorema di Rouché-Capelli*: si imposta il sistema lineare omogeneo $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = [\mathfrak{o}]$, e prendiamo un minore di **A** che ne determini la caratteristica; prendiamo gli elementi coinvolti in tale minore, e portiamo a secondo membro quelli non coinvolti in tale minore: possiamo assumerli come parametri, risolvendo il sistema per k parametri, facendo assumere di volta in volta il valore 1 ad uno di essi e a tutti gli altri il valore 0. Ognuno dei vettori trovati di volta in volta costituirà un vettore della base di $\mathbf{Ker(f)}$.

2.4 Endomorfismi

Un endomorfismo è un'applicazione lineare da uno spazio vettoriale $\mathcal{V}$ in $\mathcal{V}$. Tutte le affermazioni da qui alla triangolabilità compresa sono riferibili unicamente a endomorfismi.

2.5 Invarianti per similitudine

Due matrici **A, B** si dicono simili se esiste una matrice **M** invertibile tale che

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{M}$$

Se due matrici sono simili, allora (grazie al teorema di Binet) esse hanno gli stessi *invarianti per similitudine*
Gli invarianti per similitudine sono:

- Caratteristica
- Determinante
- Traccia
- Autovalori

2.6 Polinomio caratteristico ed autovalori

Si definisce p il polinomio caratteristico dato dall'espressione

$$p = \mathbf{det}[\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}]$$

Ogni radice di $\mathbf{det}(\mathbf{A})$ è radice del polinomio caratteristico p.
Ogni radice del polinomio caratteristico è un'autovalore della matrice $\mathbf{A}$.
La combinazione dei segni degli autovalori è tale che il loro prodotto di segno dia il segno del determinante.
Gli autovettori di $\mathbf{A}$ sono tutti i vettori che soddisfano l'equazione:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{v_i} = \lambda_i \cdot \mathbf{v_i}$$

cioè ogni autovettore si trasforma in un multiplo di sé stesso. Il vero significato degli autovettori è però che *indicano delle direzioni principali*, cioé le direzioni che tramite la matrice $\mathbf{A}$ si trasformano in sé stesse. Essi pertanto possono essere *normalizzati* senza che perdano il loro intimo significato.
Si fa notare che in molti testi inglesi la dicitura equivalente autovalori è *eigenvalues*, mentre quella di autovettori è *eigenvector*.

2.7 Diagonalizzare una matrice

Come prima cosa controllo se è diagonalizzabile. E' diagonalizzabile se le radici caratteristiche del polinomio caratteristico, cioè i valori di lambda che annullano il determinante della matrice $A - \lambda I$ sono tutti diversi.

Una matrice è diagonalizzabile anche se la molteciplità algebrica di ciascuna delle radici del polinomio corrisponde con la caratteristica della matrice $A - \lambda I$, cioè la molteciplità geometrica.

Se diagonalizzabile, trovo una base di autovettori, ottenibile impostando per ogni autovalore l'equazione $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \lambda \, \mathbf{x}$. Risolvendo il sistema lineare, trovo un autovettore per ogni autovalore, ed ognuno di questi vettori farà parte della base cercata.
Questi autovettori scritti in colonna uno di seguito all'altro costituiscono la matrice N^{-1} per il cambio di coordinate.
Si calcola la matrice inversa N.
Si fa il prodotto $N \, A \, N^{-1}$, ed abbiamo la nostra matrice diagonalizzata, che esprime lo stesso endomorfismo rispetto alla nuova base di autovettori.

2.7.1 Diagonalizzazione veloce di matrici 2x2

La diagonalizzazione di una matrice 2×2 corrisponde ad effettuare una rotazione; è sufficiente quindi imporre

$$\mathbf{Q^T A Q = I}$$

con

$$\mathbf{Q} = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{Q^T} = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$$

e ricavare α.

2.7.2 Equazione Secolare

In Scienza delle Costruzioni, si ha spesso a che fare con il *tensore delle deformazioni*, che è una matrice 3×3 **simmetrica**: la ricerca delle direzioni principali della tensione consiste nella diagonalizzazione di tale tensore, che si effettua attraverso le radici del polinomio caratteristico. Essendo questa equazione così importante per la Scienza delle Costruzioni, essa prende il nome di equazione secolare, ma è valida per qualunque matrice 3×3 simmetrica. Il polinomio caratteristico è quindi così scrivibile:

$$\lambda^3 - \lambda^2 E_1 + \lambda E_2 - E_3 = 0$$

dove E_1, E_2, E_3 sono definiti come gli *invarianti metrici* della trasformazione $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix}$$

$$E_1 = \text{traccia di } \mathbf{A}$$

$$E_2 = \mathbf{det} \begin{vmatrix} a & d \\ d & b \end{vmatrix} + \mathbf{det} \begin{vmatrix} b & f \\ f & c \end{vmatrix} + \mathbf{det} \begin{vmatrix} a & e \\ e & c \end{vmatrix}$$

$$E_3 = \det(\mathbf{A})$$

2.8 Triangolare una matrice

È necessario innanzitutto controllare se la matrice è triangolabile.

Una matrice è triangolabile in R se il polinomio caratteristico della matrice

A, cioè il determinante della matrice $A - \lambda I$, ha tutte le radici in $\mathbb{R}$.

Se triangolabile, trovo per prima cosa gli autovalori [1]: $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$
Imposto il sistema lineare: $\mathbf{Ax} = \lambda^1\mathbf{x}$. Il vettore trovato farà parte della nuova base a bandiera ed è anche autovettore.
Imposto il sistema lineare $\mathbf{Ax} = \alpha\mathbf{a} + \lambda^2\mathbf{x}$. Il vettore trovato farà parte anch'esso della base a bandiera.
Imposto il sistema lineare $\mathbf{Ax} = \beta\mathbf{a} + \gamma\mathbf{b} + \lambda^3\mathbf{x}$. Il vettore trovato farà parte anch'esso della base a bandiera.
Ripeto il procedimento per tutti gli autovalori.
Una volta trovati i vari $\mathbf{a}, \mathbf{b}, [\dots]$, li scriviamo in una matrice N^{-1} in colonna uno di seguito all'altro, troviamo la matrice inversa N e facendo il prodotto $N\,A\,N^{-1}$, otteniamo la matrice triangolata.

2.9 Matrice Trasposta

La matrice trasposta di $\mathbf{A}$ è detta $\mathbf{A^T}$: in pratica, si ottiene scambiando le righe di $\mathbf{A}$ con le colonne di $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & l & m & n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A^T} = \begin{bmatrix} a & e & i \\ b & f & l \\ c & g & m \\ d & h & n \end{bmatrix}$$

Proprietà:

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$$

$$(\mathbf{A}[\mathbf{x}])^T = [\mathbf{x}]^T\mathbf{A}^T$$

[1] Solo con $\mathbf{x}$ si intende indicare un autovettore

2.10 Matrice Inversa

La matrice inversa di $\mathbf{A}$ è quella matrice per cui si ha

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$$

In questo particolare caso, si ha anche la commutatività del prodotto fra matrici:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

La matrice $\mathbf{A}$ è invertibile se e solo se essa è **quadrata** ed il suo determinante è diverso da 0.

2.10.1 Calcolo della matrice inversa con il procedimento di Gauss

Il procedimento di Gauss per il calcolo della matrice inversa consiste nell'affiancare la matrice $\mathbf{A}$ e la matrice $\mathbf{I}$, e compiere su entrambe le matrici le stesse operazioni di *scambio, somma, sottrazione, moltiplicazione e divisione* fra righe e colonne all'interno della stessa matrice. Una volta che la matrice di sinistra $\mathbf{A}$ sarà diventata uguale alla matrice $\mathbf{I}$, la matrice di destra $\mathbf{I}$ sarà diventata l'inversa di $\mathbf{A}$.

Esempio :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Affianchiamo pertanto le due matrici:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Scambiamo la terza riga con la prima riga in entrambe:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sommiamo la prima riga moltiplicata per due alla seconda riga in entrambe:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Aggiungiamo alla prima e alla terza riga la seconda riga moltiplicata per $\frac{1}{2}$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

Aggiungiamo alla prima riga la terza moltiplicata per -1 e alla seconda la terza moltiplicata per 6:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & -4 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

Moltiplichiamo la prima riga per -1, la seconda riga per $\frac{1}{4}$, la terza riga per -2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Dato che a sinistra abbiamo la matrice identica, a destra abbiamo l'inversa di **A**.

Come si vede da questo esempio, è un metodo molto semplice, ma la sua efficacia dipende dalla sensibilità di chi lo utilizza, in quanto possono essere necessari anche molti passaggi per ottenere lo scopo.

2.11 Prodotto Scalare

Il prodotto scalare è un'operazione di moltiplicazione **fra due vettori il cui risultato è uno scalare**, ed è così definito:

$$[\mathbf{x}] \cdot [\mathbf{y}] = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

Esso è commutativo, e permette di identificare se due vettori sono fra di loro ortogonali. In particolare, **il prodotto di due vettori fra loro ortogonali è 0**.
Si può definire il prodotto scalare anche in maniera diversa, cioè come prodotto matriciale riga per colonna:

$$[\mathbf{x}] \cdot [\mathbf{y}] = [\mathbf{y}]^{\mathbf{T}}[\mathbf{x}] = [\mathbf{x}]^{\mathbf{T}}[\mathbf{y}] = [\mathbf{y}] \cdot [\mathbf{x}]$$

Nel caso si abbia un insieme di **autovettori**, vige la seguente proprietà:

$$[\mathbf{x_i}]^{\mathbf{T}} \cdot [\mathbf{x_j}] = \delta_{ij}$$

dove con δ_{ij} si è indicato il *delta di Kronecker*, che è così definito:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Prodotto scalare e matrici Sia **A** una matrice quadrata e simmetrica. Allora vale la proprietà

$$[\mathbf{x}]^{\mathbf{T}}\ \mathbf{A}\ [\mathbf{y}] = [\mathbf{y}]^{\mathbf{T}}\ \mathbf{A}\ [\mathbf{x}]$$

3 | Coniche, quadriche, quadratiche

Con i termini *coniche, quadriche e quadratiche* si intende caratterizzare una generica superficie, in particolare:

- **Superfici quadratiche**: si intende con superficie quadratica una generica superfice (quindi oggetti senza volume proprio, ovvero che *il grado dell'equazione che le caratterizza è 2*) che si sviluppa in uno spazio ad n-dimensioni *(cioè l'equazione che le caratterizza presenta n variabili)*. In particolare, se $n > 3$ si parla di *iper*-superfici.

- **Quadriche**: sono superfici quadratiche che si sviluppano nello spazio tridimensionale, cioè presentano 3 variabili nella loro formulazione.

- **Coniche**: sono superfici quadratiche che si sviluppano nello spazio bidimensionale, cioè presentano 2 variabili nella loro formulazione.

3.1 Riduzione di coniche, quadriche e quadratiche

Si indichi con x, y, z le variabili in oggetto, con n una qualunque variabile e con $\mathbf{b}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{z}$ dei vettori ad N componenti, dove N è il numero totale delle

variabili.
Data una generica superficie quadratica in forma canonica[1] in n dimensioni:

$$\begin{aligned}
a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + \cdots + \\
+ 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \cdots + \\
+ 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + \cdots + \\
+ a_{44} = 0 \quad (3.1)
\end{aligned}$$

Si scrive la matrice $\mathbf{A}$ *(che risulta avere tante colonne quanto il numero delle variabili)* in maniera tale che

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = \sum a_{i,j} n_i n_j$$

cosicché possa descrivere tutti i monomi di secondo grado[2] della quadrica. Tale matrice risulta simmetrica per costruzione.

Si scrive poi il vettore $\mathbf{b}$, definito informalmente come il "contenitore" dei termini dei monomi di primo grado, diviso 2.

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{b^T} = \begin{bmatrix} a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{bmatrix}.$$

L'equazione generale di una quadrica di grado n può essere scritta nella forma:

$$\mathbf{Ax}\cdot\mathbf{x} + 2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{x} + c = 0 \qquad (3.2)$$

[1] Si intende con forma canonica un'espressione monomiale, o equazione, mentre la stessa operazione fra spazi vettoriali (trasformazione) scritta in forma matriciale è detta affinità

[2] A meno di un fattore 2

oppure in forma più compatta

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

con la matrice $\tilde{\mathbf{A}}$ simmetrica così composta *(ovvero orlata dal vettore dei coefficienti dei monomi di primo grado e dal termine noto)*:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{vmatrix} [\mathbf{A}] & \mathbf{b} \\ \mathbf{b^T} & c \end{vmatrix}.$$

Il vettore $\mathbf{b}$ è uguale alla somma di due vettori, uno appartente al $\mathbf{Ker}(\mathbf{A})$ e uno appartente a $\mathbf{Im}(\mathbf{A})$, che come è noto sono s.s.v. di $\mathbf{A}$ *(sotto spazi vettoriali)* ortogonali fra loro. È possibile quindi scrivere

$$\mathbf{b} = \mathbf{b^1} + \mathbf{b^0}$$

con

$$\mathbf{b^1} \in \mathbf{Im}(\mathbf{A})$$

$$\mathbf{b^0} \in \mathbf{Ker}(\mathbf{A})$$

Introduciamo quindi la traslazione

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{u}$$

con

$$\mathbf{u} = \mathbf{u^1} + \mathbf{u^0}$$

Effettuiamo la sostituzione in (3.2) ed imponiamo

$$\mathbf{A}\mathbf{u^1} \cdot \mathbf{b^1} = \mathbf{0}$$

$$c' = \mathbf{b^1} \cdot \mathbf{u^1} + c$$

Giungendo quindi ad un'espressione del tipo

$$\mathbf{Ay} \cdot \mathbf{y} + c' = 0 \qquad \mathit{Se}\ \mathbf{b^0} = [\mathbf{0}] \tag{3.4}$$

$$\mathbf{Ay} \cdot \mathbf{y} + 2\,\mathbf{b^0} = 0 \qquad \mathit{Se}\ \mathbf{b^0} \neq [\mathbf{0}] \tag{3.5}$$

A questo punto, occorre diagonalizzare la matrice $\mathbf{A}$ come visto in 2.7

$$\mathbf{D} = \mathbf{Q^T A Q}$$

ed imponiamo

$$\mathbf{y} = \mathbf{Qz}$$

Sostituendo in (3.4) e (3.5) otteniamo

$$\mathbf{Dz} \cdot \mathbf{z} + c' = 0 \qquad \mathit{Se}\ \mathbf{b^0} = [\mathbf{0}] \tag{3.6}$$

$$\mathbf{Dz} \cdot \mathbf{z} + 2\,\mathbf{Q^T b^0} \cdot \mathbf{z} = 0 \qquad \mathit{Se}\ \mathbf{b^0} \neq [\mathbf{0}] \tag{3.7}$$

Che risulta la forma più semplice possibile della quadratica iniziale [3]

3.2 Classificazione delle coniche e delle quadriche

3.2.1 Forme canoniche

È possibile, una volta ridotta in forma semplice la quadrica o canonica iniziale, classificarla in base alla sua *forma*, cioè rispetto a quale fra le seguenti espressioni corrisponde:

[3] Se si è in $2-D$ o in $3-D$ è possibile riconoscere immediatamente il tipo di superficie, vedi paragrafo successivo.

Espressione	Conica
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	Ellisse reale
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	Ellisse degenere in un punto, o anche due rette immaginarie che si incontrano in un punto reale
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	Ellisse immaginaria
$\frac{x^2}{a^2} = 1$	Due rette parallele
$\frac{x^2}{a^2} = 0$	Due rette coincidenti
$\frac{x^2}{a^2} = -1$	Due rette immaginarie
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	Iperbole
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	Due rette secanti
$\frac{x^2}{a^2} = 2y$	Parabola

Alcune delle coniche più comuni

Espressione	Quadrica
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	Ellissoide reale
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$	Ellissoide degenere in un punto
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$	Ellissoide immaginario
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	Iperboloide iperbolico
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	Cono
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$	Iperboloide ellittico
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \forall z$	Cilindro ellittico
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0, \forall z$	Cilindro degenere in una retta, o anche due piani immaginari che si intersecano in una retta reale
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1, \forall z$	Cilindro immaginario
$\frac{x^2}{a^2}=1, \forall z$	Due piani paralleli
$\frac{x^2}{a^2}=0, \forall z$	Due piani coincidenti

Alcune delle quadriche più comuni.

(segue)

Espressione	Quadrica
$\frac{x^2}{a^2} = -1, \forall z$	Due piani immaginari
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \forall z$	Cilindro iperbolico
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, \forall z$	Due piani secanti
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$	Paraboloide ellittico
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$	Paraboloide iperbolico
$\frac{x^2}{a^2} = 2z, \forall y$	Cilindro parabolico

Alcune delle quadriche più comuni.

3.2.2 Classificazione mediante gli invarianti

È possibile classificare le coniche e le quadriche anche senza esplicitarle in forma algebrica, ma semplicemente tramite le proprietà dei loro invarianti per similitudine.

Proprietà degli invarianti	Conica *(n=2)*
$\mathrm{car}(\tilde{\mathbf{A}}) = 3$ $\det(\mathbf{A}) > 0$ $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{A}) < 0$	Ellisse reale
$\mathrm{car}(\tilde{\mathbf{A}}) = 3$ $\det(\mathbf{A}) > 0$ $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{A}) > 0$	Ellisse immaginaria
$\mathrm{car}(\tilde{\mathbf{A}}) = 2$ $\det(\mathbf{A}) = 0$	Due rette parallele (reali o immaginarie)
$\mathrm{car}(\tilde{\mathbf{A}}) = 1$	Due rette coincidenti
$\mathrm{car}(\tilde{\mathbf{A}}) = 2$ $\det(\mathbf{A}) < 0$	Due rette incidenti
$\mathrm{car}(\tilde{\mathbf{A}}) = 2$ $\det(\mathbf{A}) > 0$	Punto
$\mathrm{car}(\tilde{\mathbf{A}}) = 3$ $\det(\mathbf{A}) < 0$	Iperbole
$\mathrm{car}(\tilde{\mathbf{A}}) = 3$ $\det(\mathbf{A}) = 0$	Parabola

Alcune delle coniche più comuni

Per la classificazione delle quadriche, occorre introdurre il concetto di **alternanza** e **permanenza** del segno:

*Si suppone di avere un polinomio in cui i monomi sono ordinati per grado decrescente: se il segno fra due monomi consecutivi rimane uguale, esso significa **una permanenza**, se invece il segno cambia, esso significa **un'alternanza**.*

In particolare, quando si intende classificare una quadrica, ci si riferisce all'alternanza o alla permanenza del segno del **polinomio caratteristico**.

Proprietà degli invarianti	Quadrica *(n=3)*
$\det(\tilde{\mathbf{A}}) > 0$ car $(\mathbf{A}) = 3$ 0 o 3 alternanze	Ellissoide immaginario
$\det(\tilde{\mathbf{A}}) > 0$ det $(\mathbf{A}) = 0$	Paraboloide iperbolico
$\det(\tilde{\mathbf{A}}) < 0$ car $(\mathbf{A}) = 3$ 0 o 3 alternanze	Ellissoide reale
$\det(\tilde{\mathbf{A}}) > 0$ car $(\mathbf{A}) = 3$ 1 o 2 alternanze	Iperboloide iperbolico
$\det(\tilde{\mathbf{A}}) < 0$ car $(\mathbf{A}) = 3$ 1 o 2 alternanze	Iperboloide ellittico

Alcune delle quadriche più comuni.

Proprietà degli invarianti	Quadrica *(n=3)*
$\mathrm{car}(\tilde{\mathbf{A}}) = 3$ $\mathrm{car}\ (\mathbf{A}) = 2$	Cilindro ellittico reale, o immaginario, o iperbolico
$\det(\tilde{\mathbf{A}}) = 3$ $\mathrm{car}\ (\mathbf{A}) = 3$	Punto
$\mathrm{car}(\tilde{\mathbf{A}}) = 3$ $\mathrm{car}\ (\mathbf{A}) = 1$	Cilindro parabolico
$\mathrm{car}(\tilde{\mathbf{A}}) = 2$ $\mathrm{car}\ (\mathbf{A}) = 2$	Piani incidenti o retta
$\mathrm{car}(\tilde{\mathbf{A}}) = 2$ $\mathrm{car}\ (\mathbf{A}) = 1$	Piani paralleli, reali o immaginari
$\mathrm{car}(\tilde{\mathbf{A}}) = 1$	Piani coincidenti

Alcune delle quadriche più comuni.

Bibliografia

Bona, Basilio. *Appunti di Algebra Lineare e Matrici*. 2003. URL: `http://www.docente.unicas.it/useruploads/000822/files/appunti_matrici_vettori.pdf`.

Franzoni, Tullio. *Dispense di Geometria*. Pisa University Press, 2004.