

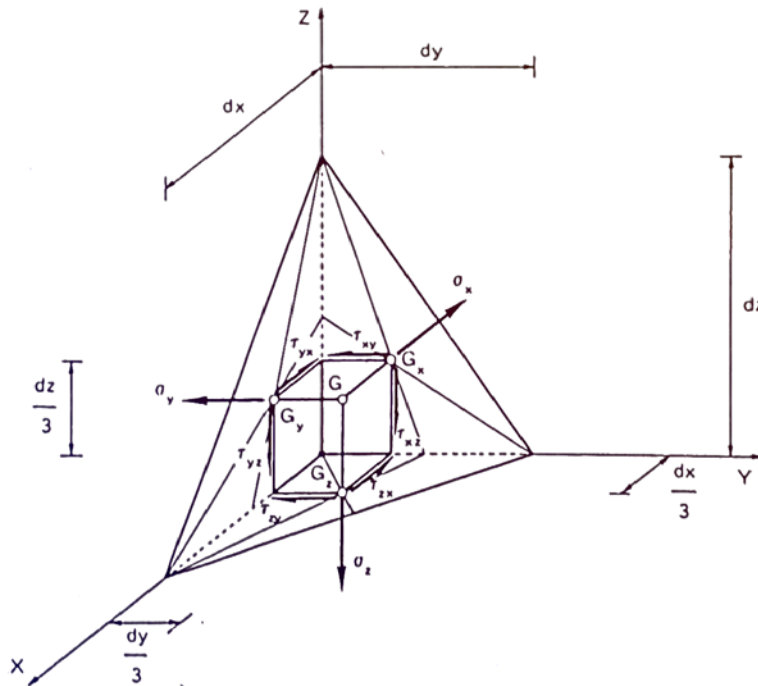
# DISPENSA DI SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

(Andrea Albero)

Teorema di Cauchy:

$$\{t_n\} = [\sigma] \{n\}$$

$$\begin{bmatrix} t_{nx} \\ t_{ny} \\ t_{nz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & t_{yx} & t_{zx} \\ t_{xy} & \sigma_y & t_{zy} \\ t_{xz} & t_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}$$



Direzioni principali della tensione e invarianti:

“Una direzione è definita principale se lungo tale direzione gli sforzi tangenziali sono nulli: questo accade quando una terna di versori locali ha un asse // allo sforzo totale e gli altri due sono ortogonali ad esso.”

$[\sigma_n]$  = tensore idrostatico

$[\sigma] - [\sigma_n]$  = tensore deviatorico

$[\sigma]$  = tensore degli sforzi generico

$\{n\}$  = vettore dei coseni direttori di un versore

$$\{t_n\} = [\sigma] \{n\} \rightarrow \{n\}^T \{t_n\} = \{n\}^T [\sigma] \{n\} = [\sigma_n] \rightarrow \{t_n\} = [\sigma_n] \{n\}$$

Dal teorema di Cauchy, sostituendo il primo membro con un prodotto matriciale del tipo  $\{t_n\} = [\sigma_n] \{n\}$  (intendendo  $[\sigma_n]$  come tensore idrostatico, cioè con le componenti della sua traccia tutte uguali in valore a  $\sigma_n$  e tutte le componenti tangenziali  $t_{ab} = 0$ ) sottraendolo ad ambo i membri, ed imponendo la condizione aggiuntiva di normalità dei coseni direttori dei versori  $\{n\}$  (cioè quindi nel complesso si fa il lagrangiano del teorema di Cauchy) si ottiene un sistema di secondo grado, nella cui soluzione si definiscono:

- Le direzioni principali, date da  $\{n\}$
- Le tensioni principali, date da  $\{\sigma_n\}$
- Gli invarianti scalari della tensione  $J_1, J_2$  e  $J_3$

$$\begin{cases} [[\sigma] - [\sigma_n]] \cdot \{n\} = 0 \\ n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \end{cases}$$

È possibile definire un sotto-sistema lineare omogeneo, in virtù del fatto che  $\{n\}$  non può essere uguale a 0:

$$[\sigma] - [\sigma_n] = 0$$

Equazione risolutiva del sistema lineare omogeneo:

$$\sigma_n^3 - J_1 \sigma_n^2 - J_2 \sigma_n - J_3 = 0$$

- $J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$  (traccia di  $[\sigma]$ )
- $J_2 = -\sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_x \sigma_z + t_{xy}^2 + t_{xz}^2 + t_{zy}^2$  (-1 multipl. i det. dei minori di  $[\sigma]$ )
- $J_3 = \sigma_x (\sigma_y \sigma_z - t_{zy}^2) + \sigma_y (\sigma_x \sigma_z - t_{xz}^2) + \sigma_z (\sigma_x \sigma_y - t_{xy}^2)$  (det. di  $[\sigma]$ )

I 3 valori di  $\sigma_n$  sono **autovalori** del sistema di secondo grado, nonché le tensioni principali lungo le varie direzioni, e perciò sostituendo tali autovalori nel sistema di secondo grado, si ottengono di volta in volta i coseni direttori di ogni direzione principale.

Da ogni autovalore si ottiene quindi un vettore  $\{n\}$ , composto da  $n_x, n_y, e n_z$ , ed in totale si ottengono 3 vettori  $\{n\}$  che mi definiscono le direzioni principali del solido: lungo tali direzioni, le tensioni sono pari a  $\sigma_{n1}, \sigma_{n2}$  e  $\sigma_{n3}$ .

$$[\sigma_n] = \{n\}^T \{t_n\} = \{n\}^T [\sigma] \{n\}$$

Se:

- 3 autovalori diversi  $\rightarrow$  1 sola terna di direzioni principali (stato tensionale triassiale)
- 2 autovalori uguali  $\rightarrow$  1 direzione principale e 1 giacitura principale (stato tensionale cilindrico)
- 3 autovalori uguali  $\rightarrow$  tutte le direzioni sono principali (stato tensionale sferico)

Teorema della Divergenza:

$$\int_V \mathbf{div} (\{t\}) dV = \int_A \{t\} \times \{n\} dA$$

Sistema staticamente ammissibile:

$$\begin{cases} \sum Tensioni\ interne = - \sum Forze\ di\ volume\ esterne \\ \sum Tensioni\ superficiali = \sum Forze\ di\ superficie\ esterne \end{cases}$$

$$\sum Forze\ di\ volume\ esterne = \int_V \{F\} dV = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \sum Tensioni\ Interne &= \int_A [t_n] dA = \int_A [\sigma] \times \{n\} dA = \int_V div([\sigma]) dV = \\ &= \int_V \begin{bmatrix} \sigma_x & t_{yx} & t_{zx} \\ t_{xy} & \sigma_y & t_{zy} \\ t_{xz} & t_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{bmatrix} dV = \int_V [\sigma] \times \{\partial\} dV \\ \sum Forze\ di\ superficie\ esterne &= \int_A \{p\} dA = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \\ \sum Tensioni\ superficiali &= [t_n] = [\sigma] \times \{n\} \end{aligned}$$

Un sistema viene quindi definito staticamente ammissibile quando:

$$\begin{cases} [\sigma] \times \{\partial\} = -\{F\} \\ [\sigma] \times \{n\} = \{p\} \end{cases}$$

Sistema cinematicamente ammissibile:

Un sistema composto da una deformazione  $[\varepsilon]$  e uno spostamento  $[\eta]$  si dice cinematicamente ammissibile quando:

$$\frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{bmatrix} \times [u \quad v \quad w] + \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \end{bmatrix} \right) = [\varepsilon]$$

Quindi scrivibile come

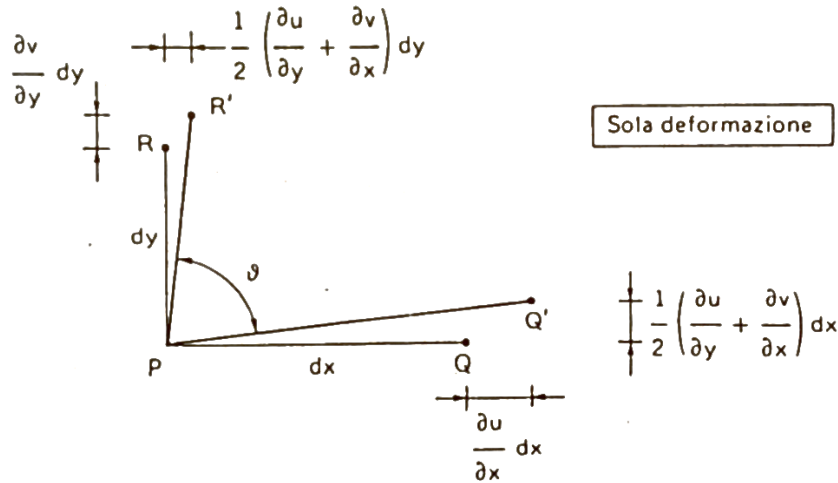
$$\frac{1}{2} (\{\partial\} \cdot \{\eta\}^T + \{\eta\} \{\partial\}^T) = [\varepsilon]$$

Con

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad e \quad \{\eta\} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

Notare che affinché un sistema sia cinematicamente ammissibile non sono posti vincoli traslazionali o rotazionali, in quanto sono contributi di moto rigido e pertanto limitati esclusivamente dai vincoli esterni.

Nella definizione della matrice deformativa  $[\varepsilon]$ , si può notare che la traccia costituisce le dilatazioni lineari del solido lungo le tre direzioni, mentre gli altri termini sono gli scorrimenti angolari nei vari piani che il corpo subisce.



Principio dei Lavori Virtuali (PLV) per corpi deformabili:

Definendo

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad e \quad \{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix}$$

E si abbia un sistema di forze esterne staticamente ammissibile  $\{F_a\}$ ,  $\{p_a\}$  con tensioni  $\{\sigma_a\}$ , ed un sistema di spostamenti e deformazioni  $\{\varepsilon_b\}$ ,  $\{\eta_b\}$  cinematicamente ammissibile, allora il principio dei valori virtuali, che esprime l'uguaglianza del lavoro delle forze interne con quello delle forze esterne, si può scrivere

$$\int_V \{\sigma_a\}^T \times \{\varepsilon_b\} dV = \int_V \{F_a\}^T \times \{\eta_b\} dV + \int_A \{p_a\}^T \times \{\eta_b\} dA$$

Sancendo di fatto la possibilità di scrivere il lavoro interno di deformazione come prodotto scalare tra vettore tensione e vettore deformazione.

Per ottenere il caso di corpo rigido, basta porre uguale a 0 il primo termine (deformazioni nulle).

Teorema di Kirchhoff o di Unicità della Soluzione:

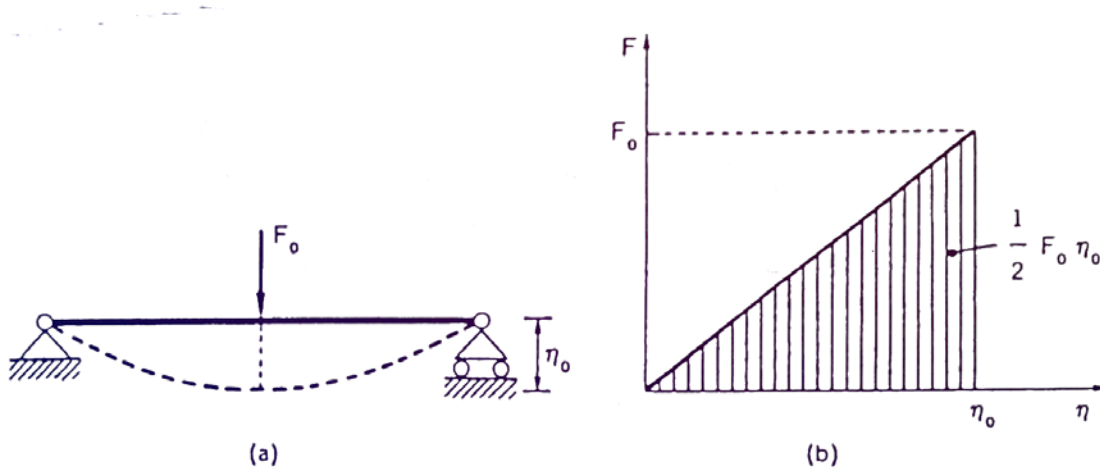
“Un sistema di sollecitazioni  $\{F\}$ ,  $\{p\}$ ,  $\{\eta_0\}$  può generare una sola risposta deformativa/tensionale  $\{\eta_a\}$ ,  $\{\varepsilon_a\}$ ,  $\{\sigma_a\}$ .”

Teorema di Clapeyron:

“Per un corpo **elastico lineare**, il lavoro di deformazione compiuto da un sistema di forze  $\{F\}$ ,  $\{p\}$  che genera un campo di spostamento staticamente e cinematicamente ammissibile senza effetti dinamici è:

$$\frac{1}{2} \int_V \{F\}^T \{\eta\} dV + \frac{1}{2} \int_A \{p\}^T \{\eta\} dA$$

Con le rispettive condizioni di calcolo, può essere applicato ad ogni caso: ad esempio, se si sta trattando la deformazione di una trave, non si hanno forze  $\{p\}$  di superficie e il primo integrale di volume diventa un integrale di linea.




---

### Teorema di Betti:

“Il lavoro di deformazione compiuto da due sistemi di forze ( $\{F\}$ ,  $\{p\}$ ) chiamati A e B, applicati in successione  $A \rightarrow B$  è:

$$L_{a+b} = L_a + L_b + L_{ab}$$

Mentre in successione  $B \rightarrow A$  è:

$$L_{b+a} = L_a + L_b + L_{ba}$$

Questi due lavori sono uguali solo quando l'ultimo termine (cioè il lavoro mutuo) è identico: questo accade solo se i due sistemi di forza A e B sono energeticamente ortogonali, cosa che avviene quando i sistemi di forze presentano una simmetria interna. Se questo non avviene, allora **non si può ritenere valido** il principio di sovrapposizione degli effetti per quanto concerne il lavoro di deformazione.

Rimane invece sempre applicabile (in caso di materiale elastico lineare) per gli spostamenti, per le deformazioni e per le tensioni.”

---

Legame costitutivo elastico:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix}$$

Cioè in forma compatta

$$\{\varepsilon\} = [H]^{-1} \{\sigma\}$$

La relazione inversa è scrivibile invece come:

$$\frac{1}{2G} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$E > 0$$

$$\text{Teoricamente: } -1 < \nu < \frac{1}{2}$$

$$\text{Sperimentalmente: } 0 < \nu < \frac{1}{2}$$

Equazioni Cardinali della Statica:

$$\text{Equilibrio alla traslazione: } \int \{\mathbf{F}\} = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \{\mathbf{R}\} = \mathbf{0}$$

$$\text{Equilibrio alla rotazione: } \int \{\mathbf{r}\} \wedge \{\mathbf{F}\} = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \{\mathbf{M}\} = \mathbf{0}$$

---

## Solido & Ipotesi di De Saint-Venant:

Solido: *“Un solido di Saint-Venant è una volume cilindrico, con un asse rettilineo Z, i cui punti costituiscono ciascuno il baricentro di una sezione ortogonale a tale asse. La sua sezione è costante ed è costituito da un materiale elastico, lineare, isotropo ed omogeneo.”*

Ipotesi: *“A sufficiente distanza da ciascuna base del solido di Saint-Venant, lo stato deformativo e tensionale dipende soltanto dalla risultante  $\{R\}$  delle forze agenti sulla base medesima e dal momento risultante  $\{M\}$  delle forze rispetto al baricentro di tale base.”*

Applicabilità: affinché la teoria di De Saint-Venant sia valida, il solido deve possedere una snellezza sufficiente a far valere tale trattazione. In genere, si ritiene soddisfatta quando la dimensione Z è almeno nell'ordine di 5 volte superiore alle altre dimensioni.

---

## Problema di De Saint-Venant:

Il problema di Saint-Venant è un caso particolare del problema elastico: le equazioni necessarie a risolverlo sono le:

- Equazioni Statiche

$$[\sigma] \times \{\vartheta\} = -\{F\}$$

- Equazioni Cinematiche

$$\frac{1}{2} (\{\vartheta\} \cdot \{\eta\}^T + \{\eta\} \{\vartheta\}^T) = [\varepsilon]$$

- Equazioni Costitutive

$$\{\varepsilon\} = [H]^{-1} \{\sigma\}$$

- Ipotesi semplificative e Condizioni al Contorno:

**Il solido è sollecitato solo sulle basi esclusivamente da forze di superficie. Le condizioni al contorno sono quindi:**

$$\text{Basi del Solido: } n_x = n_y = 0, \quad n_z = 1$$

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & t_{yx} & t_{zx} \\ t_{xy} & \sigma_y & t_{zy} \\ t_{xz} & t_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Superfici Laterali: } n_z = 0, \quad n_x = n_y = 1$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & t_{yx} & t_{zx} \\ t_{xy} & \sigma_y & t_{zy} \\ t_{xz} & t_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

---

## Legame fra Spostamenti e Tensioni, Curvatura e Rotazioni

Il legame costitutivo elastico, applicato ad un sistema cinematicamente ammissibile, dà luogo ad una correlazione diretta fra **spostamenti e tensioni applicate**: per rendere più facilmente enunciabile tale relazione, si scriverà in termini di vettori spostamento e vettori tensione (anche se in realtà sono tensori):

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix}$$

---

## Sforzo Normale centrato, eccentrico, Flessione Retta, Deviata, Presso-Tenso-Flessione

*Centro di sollecitazione "C"*: punto in cui se applico uno sforzo normale N ottengo ad uno stato di sollecitazione composto da N, M<sub>x</sub> e M<sub>y</sub>. È anche possibile data una terna sollecitante trovare il centro di sollecitazione. La sua distanza dal baricentro **G** è espressa da e<sub>x</sub> ed e<sub>y</sub>:

$$e_x = \frac{M_x}{N} \qquad e_y = -\frac{M_y}{N}$$

*Sforzo Normale Centrato*:

$$e_x = e_y = 0$$

*Flessione Retta (solo M<sub>x</sub>, ma potrebbe essere anche solo M<sub>y</sub>, con gli opportuni cambi di variabile e indice)*:

$$N = \int_A \sigma_z dA = 0$$

$$M_x = \int_A \sigma_z y dA \neq 0$$

*Flessione Deviata (cioè somma di due flessioni rette)*:

$$N = \int_A \sigma_z dA = 0$$

$$M_x = \int_A \sigma_z y dA \neq 0$$

$$M_y = \int_A \sigma_z x dA \neq 0$$



Presso-Tenso-Flessione Deviata (somma di flessione deviata e uno sforzo normale centrato: il tutto corrisponde complessivamente ad uno sforzo normale eccentrico):

$$N = \int_A \sigma_z dA \neq 0$$

$$M_x = \int_A \sigma_z y dA \neq 0$$

$$M_y = \int_A \sigma_z x dA \neq 0$$

Equazione di Navier:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x \cdot y}{J_{xg}} + \frac{M_y \cdot x}{J_{yg}}$$

Per piccoli spostamenti di un solido di Saint-Venant (condizione che si considera soddisfatta quando il solido di De Saint-Venant è sufficientemente snello) e sotto l'ipotesi di conservazione delle sezioni piane, si ha:

$$d\varphi_x = \chi_x dz = \frac{M_x}{E I_x} dz$$

$$\chi_x = \frac{M_x}{E I_x}$$

$$d\varphi_y = \chi_y dz = \frac{M_y}{E I_y} dz$$

$$\chi_y = \frac{M_y}{E I_y}$$

Dove:

- $\varphi_x$  è l'angolo di rotazione del punto dovuto ad un momento  $M_x$  (e viceversa per la rotaz. Y)
- $\chi_x$  è la curvatura prodotta dalla flessione  $M_x$  (e viceversa per la rotaz. Y)

Si può facilmente applicare anche a un  $M_y$  quanto detto sopra.

**Momento limite di una sezione:** è un'applicazione dell'equazione di Navier, ed è definito come il prodotto di una tensione limite moltiplicato il modulo di resistenza della sezione stessa: questo permette di capire direttamente dal momento sollecitante (se vale il principio di sovrapposizione degli effetti) il comportamento della sezione sotto quella sollecitazione:

$$\text{Momento elastico limite:} \quad M_{el,y} = f_{yk} \cdot W_{el,y}$$

$$\text{Momento ultimo limite:} \quad M_{pl,y} = M_{u,y} = f_{yk} \cdot W_{pl,y}$$

Il **modulo di resistenza elastico** è definito come quanto scritto prima, cioè è il rapporto fra il momento d'inerzia rispetto ad un asse e la massima distanza di un punto della sezione da tale asse, mentre il **modulo di resistenza plastico** è definito come la somma dei momenti statici rispetto all'asse interessato.

-----

## Torsione

La torsione è una sollecitazione che tende a far ruotare una sezione attorno al proprio asse: è causata da un'eccentricità del taglio rispetto al centro di torsione. È possibile, dato che è energeticamente ortogonale al taglio, trattare le due sollecitazioni separatamente e sommarne gli effetti.

Si definisce:

- $\omega$  = funzione di ingobbamento (è una costante nel caso di torsione primaria, come quella che viene trattata di seguito, mentre è variabile nel caso di torsione secondaria o di Vlasov-Timoshenko; è una funzione armonica, cioè ha il laplaciano nullo)
- $(x_c, y_c)$  = coordinate del centro di taglio

In particolare si ha ( $C$  = contorno della sezione):

$$x_c = -\frac{1}{A} \oint_C \omega \, dx$$

$$y_c = -\frac{1}{A} \oint_C \omega \, dy$$

Si definisce inoltre l'angolo unitario di torsione, cioè l'angolo di le sezioni terminali della trave (solido snello) ruotano relativamente:

$$\theta = \frac{M_z}{G I_t}$$

Dove  $I_t$  è il fattore di rigidità torsionale, al più uguale al momento d'inerzia polare della sezione (caso di sezione circolare):

$$I_t = \int_A (x^2 + y^2 + x \frac{\partial \omega}{\partial y} - y \frac{\partial \omega}{\partial x}) \, dA$$

La tensione agente sulla sezione è:

$$\tau_{zx} = \frac{M_z}{I_t} \left[ \frac{\partial \omega}{\partial x} - (y - y_c) \right]$$

$$\tau_{zy} = \frac{M_z}{I_t} \left[ \frac{\partial \omega}{\partial y} + (x - x_c) \right]$$

La trattazione generale però risulta complessa da applicare, e la torsione risulta un parametro particolarmente importante nelle sezioni sottili, pertanto si fa riferimento a due tipologie di casi per la torsione: **le sezioni aperte e le sezioni sottili chiuse.**

---

### Torsione nelle sezioni aperte

- **Circolare:**

$$\theta = \frac{M_z}{G I_t}$$

$$I_t = I_p = \pi \frac{R^4}{2}$$

$$\tau = \frac{M_z}{I_t} r$$

- **Rettangolare (A= ab):**

$$\theta = \frac{M_z}{G I_t}$$

$$I_t = \beta a b^3$$

$$\tau_{zx} = \frac{M_z}{I_t} y$$

$$\tau_{zy} = \frac{M_z}{I_t} x$$

a/b	1	1.5	2	3	10	$\infty$
$\beta$	0.141	0.196	0.229	0.263	0.312	1/3

Sezione composta da più rettangoli:

Si un nuovo coefficiente di rigidità torsionale complessivo e un coefficiente di ripartizione torsionale:

$$I_{t \text{ totale}} = \sum I_{t \text{ singolo}}$$

$$\text{coeff. di ripartizione} = I'_t = \frac{I_{t \text{ singolo}}}{I_{t \text{ totale}}}$$

Ogni rettangolo incassa una quota di  $M_z$  pari a

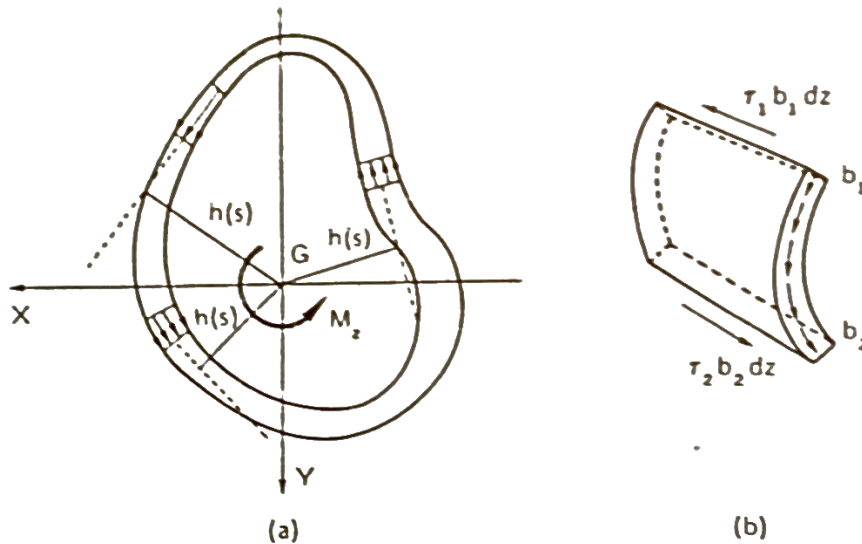
$$M'_z = M_z I'_t$$

Dopodiché, si tratta ogni rettangolo singolarmente, sicuri che la rotazione  $\vartheta$  di tutta la sezione è uguale per ogni rettangolo.

-----

**Torsione nelle sezioni sottili chiuse:**

La trattazione della torsione nelle sezioni sottili chiuse si basa sull'analogia idrodinamica, e cioè che le tensioni torsionali sono come un flusso la cui portata è costante in ogni tratto della sezione: ne consegue, che a spessori maggiori corrisponderanno tensioni torsionali minori e viceversa:



$$\tau_{zs}(s) \cdot b(s) = \text{costante}$$

In particolare, è valida la *formula di Bredt*:

$$\tau_{zs} = \frac{M_z}{2 \cdot \Omega \cdot b(s)}$$

Dove  $\Omega$  è l'area della linea media del profilo sottile.

La formula

$$\theta = \frac{M_z}{G I_t}$$

È ancora valida, ma  $I_t$  ha una formulazione generale indipendente dalla funzione di ingobbamento:

$$I_t = \frac{4 \Omega^2}{\oint_{\Omega} \frac{1}{b(s)} dS}$$

Dove il denominatore del secondo termine è il perimetro della linea media **pesata sullo spessore: pertanto, se lo spessore varia, l'integrale di linea sarà la somma delle varie lunghezze divise ciascuna per il rispettivo spessore.**

Si ha infatti che se lo spessore è costante

$$I_t = \frac{4 \Omega^2 b}{s}$$

Torsione nelle sezioni sottili chiuse con parti aperte:

La trattazione è analoga a quelle già viste:

- Si scompone il momento torcente totale  $M_z$  in due parti,  $M_{z1}$  in  $M_{z2}$  in: la parte 1 verrà assorbita dalla parte scatolare mentre la parte 2 dalle parti aperte.
- Si impone la congruenza angolare

$$\begin{cases} \theta = \theta_1 = \theta_2 = \frac{M_{z1}}{G I_{t1}} = \frac{M_{z2}}{G I_{t2}} \\ M_{z1} + M_{z2} = M_z \end{cases}$$

Dopodiché si risolve ciascuna parte (1 e 2) separatamente, ottenendo risultati congruenti.

-----

### Torsione nelle sezioni sottili chiuse pluriconnesse:

In sostanza, non cambia nulla da una sezione sottile chiusa normale, se nonché bisogna identificare il verso di rotazione della sezione ed imporre "l'uguaglianza delle portate" (intese come tensioni torsionali lungo la linea ortogonale alla linea media) in analogia con l'idrodinamica: cioè, il fluire delle portate attraverso tutte le parti della sezione deve essere in equilibrio. Queste equazioni aggiuntive consentono di calcolare la torsione in ogni parte della sezione.

Bisogna fare però particolare attenzione: infatti, una volta definito il verso delle tensioni, in ogni parte singolarmente connessa bisogna far sì che le tensioni fluiscano in maniera coerente, e se il flusso delle tensioni in una zona è contrario rispetto a quello definito, allora anche le tensioni saranno di verso opposto in quel punto.

-----

### Taglio Retto e Deviato

Il taglio si compone di: sforzo di taglio  $T$ , tensione di taglio  $\tau$  e scorrimenti  $\gamma$ .

$$T_x = \frac{dM_x}{dz}$$

$$T_y = \frac{dM_y}{dz}$$

La tensione di taglio in genere varia specialmente nella direzione del taglio, ma anche ortogonalmente ad esso: quest'ultima variazione però spesso viene trascurata se non si hanno solidi compatti, e viene trascurata, approssimando il valore sulla corda della sezione ortogonale alla direzione del taglio al valore medio lungo tale corda, considerandolo di fatto costante. Questo è ciò che approssima la *formula di Jourawski*:

$$\tau_{zs} = \frac{T_y S_x^{A'}}{I_x b}$$

Dove  $S_x^{A'}$  è il momento statico di una parte della sezione tagliata dalla corda, mentre  $b$  è la lunghezza della corda e  $I_x$  è il momento d'inerzia rispetto ad un asse baricentrico parallelo alla corda. In genere tale formula è valida solo per sezioni sottili: negli altri casi infatti si sottostima troppo la tensione di taglio massima e si ricorre ad altri modelli semplificati, come il traliccio di Ritter-Mörsch per il cls.

Gli scorrimenti invece valgono:

$$\gamma_x = \frac{t_x T_x}{G A}$$

Dove  $t_x$  è il fattore di taglio retto.

### Taglio Deviato

Se si ha taglio deviato (cioè composizione di sollecitazioni taglianti  $T_x$  e  $T_y$ ) bisogna considerare sia nella formula di Jourawski che negli scorrimenti angolari:

$$\tau_{zs} = \frac{T_y S_x^{A'}}{I_x b} + \frac{T_x S_y^{A'}}{I_y b}$$

$$\gamma_x = \frac{t_x T_x}{G A} + \frac{t_{xy} T_y}{G A}$$

$$\gamma_y = \frac{t_{xy} T_x}{G A} + \frac{t_y T_y}{G A}$$

Dove in più alla trattazione retta  $t_{xy}$  è il fattore mutuo, che viene dal teorema di Betti.

Per le sezioni più comuni, il fattore mutuo di taglio è uguale a 0: infatti, se la sezione presenta almeno un asse di simmetria, esso si annulla.

I fattori di taglio retto invece non si annullano mai, e dipendono unicamente dalla geometria della sezione:

Tipo di sezione	Fattore di taglio retto
Rettangolare	$\frac{6}{5}$
Circolare	$\frac{10}{9}$
Circolare cava sottile	2
Doppio T oppure Scatolare	$\cong \frac{A}{A_{anima}}$

Espressioni complete ( $\mathfrak{N}$  = linea media della sezione sottile)

$$t_x = \frac{A}{I_y^2} \int_{\mathfrak{N}} \frac{S_y^2}{b} dS$$

$$t_y = \frac{A}{I_x^2} \int_{\mathfrak{N}} \frac{S_x^2}{b} dS$$

$$t_{xy} = \frac{A}{I_y I_x} \int_{\mathfrak{N}} \frac{S_y S_x}{b} dS$$

Problema della trave (asse rettilineo z) alla De Saint-Venant tridimensionale – Equazioni matriciali finali:

$q$ = carichi distribuiti ortogonali alla trave

$p$ = carichi distribuiti assiali alla trave

$m$ = momenti distribuiti (flettenti  $(x,y)$  e torcenti $(z)$ ) sulla trave

$$\begin{bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \\ \varepsilon_z \\ \chi_x \\ \chi_y \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dz} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dz} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{dz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{d}{dz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{d}{dz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{d}{dz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dz} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dz} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{dz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{d}{dz} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{d}{dz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{d}{dz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ N \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ p \\ m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \\ \varepsilon_z \\ \chi_x \\ \chi_y \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{t_x}{G A} & \frac{t_{xy}}{G A} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t_{yx}}{G A} & \frac{t_y}{G A} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{EA} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{EI_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{EI_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{GI_t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ N \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}$$

Energia di deformazione (se presente asse di simmetria -> fattore mutuo = 0 -> valido Princ. Sovrapp. Eff.)

$$\frac{dL}{dz} = \frac{1}{2} \left( \frac{t_x}{G A} T_x^2 + \frac{t_y}{G A} T_y^2 + \frac{2 t_{xy}}{G A} T_x T_y + \frac{1}{EA} N^2 + \frac{1}{EI_x} M_x^2 + \frac{1}{EI_y} M_y^2 + \frac{1}{GI_t} M_z^2 \right)$$


---

Problema della trave (asse rettilineo z) alla De Saint-Venant – Equazioni matriciali finali:

$q$ = carichi distribuiti ortogonali alla trave

$p$ = carichi distribuiti assiali alla trave

$m$ = momento distribuito flettente sulla trave

$$\begin{bmatrix} \gamma_y \\ \varepsilon_z \\ \chi_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dz} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{d}{dz} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{dz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \\ \varphi_x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dz} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dz} & 0 \\ -1 & 0 & \frac{d}{dz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_y \\ N \\ M_x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q \\ p \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_y \\ \varepsilon_z \\ \chi_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{t_y}{G A} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{EA} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{EI_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_y \\ N \\ M_x \end{bmatrix}$$

Problema della trave (asse curvilineo z) alla De Saint-Venant – Equazioni matriciali finali:

$q$ = carichi distribuiti ortogonali alla trave

$p$ = carichi distribuiti assiali alla trave

$m$ = momento distribuito flettente sulla trave

$$\begin{bmatrix} \gamma_y \\ \varepsilon_z \\ \chi_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dz} & -\frac{1}{r} & 1 \\ \frac{1}{r} & \frac{d}{dz} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{dz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \\ \varphi_x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dz} & \frac{1}{r} & 0 \\ \frac{1}{r} & \frac{d}{dz} & 0 \\ -1 & 0 & \frac{d}{dz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_y \\ N \\ M_x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q \\ p \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} \gamma_y \\ \varepsilon_z \\ \chi_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{t_y}{G A} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{EA} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{EI_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_y \\ N \\ M_x \end{bmatrix}$$

### Equazione Differenziale della Linea Elastica (travi ad asse rettilineo):

L'equazione della linea elastica si può ritenere valida quando si tratta una trave ad asse rettilineo.

$v$  = freccia verticale, cioè abbassamento verticale di un punto

A rigore, si ha una freccia dovuta sia alle sollecitazioni taglienti e una freccia dovuta alle sollecitazioni flettenti: tuttavia, le prime sono proporzionali alla lunghezza della trave, mentre le seconde sono proporzionali alla terza o quarta potenza della lunghezza; pertanto, la freccia totale può essere approssimata a quella dovuta ai momenti flettenti (ipotesi semplificativa di Eulero).

Freccia (reale)

$$v^{Totale} = v^{Taglio} + v^{Momento}$$

Taglio (che verrà trascurato, perché utilizziamo la trattazione di Eulero-Bernoulli, nella trave di Timoshenko non viene trascurato):

$$dv^T = \gamma_y dz$$

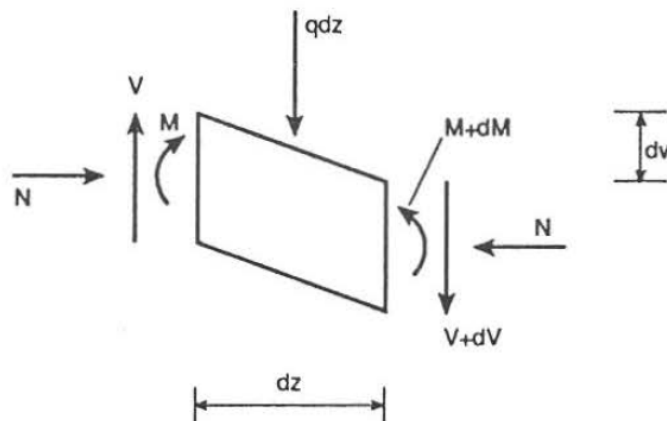
### Equazione approssimata (no taglio)

Momento Flettente:

$$dv^M = -\varphi_x dz \rightarrow \frac{d^2 v^M}{dz^2} = -\frac{d\varphi_x}{dz} = -\chi_x = -\frac{M_x}{E I_x} \cong \frac{d^2 v}{dz^2}$$

Cioè l'equazione che regge il legame costitutivo e la congruenza, trascurando l'apporto del taglio.

Scrivendo l'equazione di equilibrio alla traslazione e rotazione di un conico elementare di una trave semplicemente appoggiata e caricata con un carico distribuito  $q=costante$  (almeno su  $dz$ ) e un carico assiale  $p$  si ha:



$$\begin{cases} \sum F_x \rightarrow P - P = 0 \\ \sum F_y \rightarrow V(z) - p \, dv - V(z) - dV(z) = 0 \\ \sum M_a \rightarrow -M(z) - V(z)dz - N \, dv + q \frac{dz^2}{2} + M(z) + dM(z) = 0 \\ \qquad \qquad \qquad -\frac{M_x}{E I_x} \cong \frac{d^2 v}{dz^2} \end{cases}$$

Risolvendo il sistema (si trascurano gli infinitesimi di grado superiore al primo), si ottiene l'equazione di Eulero:

$$E I_x \cdot \frac{d^4 v}{dz^4} + N \cdot \frac{d^2 v}{dz^2} - q(z) = 0$$

Si è ottenuta l'equazione della linea elastica con effetti del second'ordine. Si hanno quindi più tipologie di equazioni della linea elastica:

*Equazione della linea elastica **con** effetti del second'ordine:*

$$E I_x \cdot \frac{d^4 v}{dz^4} + N \cdot \frac{d^2 v}{dz^2} - q(z) = 0$$

*Equazione della linea elastica **senza** effetti del second'ordine:*

$$E I_x \cdot \frac{d^4 v}{dz^4} - q(z) = 0$$

oppure:

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = -\frac{M_x}{E I_x}$$

Per ottenere la freccia totale di un sistema statico, è sufficiente integrare una delle equazioni sopra scritte: in base al problema che si ha in oggetto, si usa la prima (che è sempre corretta) o la seconda (solo se non si hanno carichi assiali rilevanti).

In ogni caso, conviene sempre riferirsi ad un'equazione differenziale di secondo grado: quindi si tende a sostituire la derivata quarta con la derivata seconda del momento, e sostituire il termine  $N/(E I_x)$  con  $\alpha$  se si considerano gli effetti del secondo ordine, oppure utilizzare il legame costitutivo-congruenza se non si considerano gli effetti del second'ordine:

*Equazione della linea elastica **con** effetti del second'ordine:*

$$\frac{d^2 M_x}{dz^2} + \alpha \frac{d^2 v}{dz^2} - \frac{q(z)}{E I_x} = 0$$

La soluzione di quest'equazione ha una forma del tipo:

$$v(z) = A \cos(\alpha z) + B \sin(\alpha z) + x_p$$

Dove  $x_p$  è una soluzione particolare. In genere ha una forma del tipo

$$x_p = Cz + D + E \cdot q(z)$$

Se  $q=\text{costante}$ , la freccia assume la forma

$$v(z) = A \cos(\alpha z) + B \sin(\alpha z) + Cz + D + \frac{qz^2}{2N}$$

Il valore delle **costanti** è determinato dalle **condizioni al contorno**. È necessario arrivare fino alla derivata quarta per determinare tutte le costanti **A, B, C, D, E**.

Nei casi notevoli, la freccia è definita come **Forza / Rigidezza**: una volta calcolata la freccia infatti, si ottiene una funzione freccia che dipende solo dalla forza applicata. Gli abbassamenti del caso quindi dipendono unicamente da questa, essendo la rigidezza definita dalle caratteristiche geometriche della trave e dalle condizioni al contorno.

Risoluzione di un'equazione differenziale di 2° grado omogenea:

$$a \frac{d^2v(z)}{dz^2} + b \frac{dv(z)}{dz} + c v(z) = 0$$

- Scrivo il polinomio caratteristico (cioè sostituisco i differenziali con una variabile dello stesso ordine)

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

- Trovo le radici del polinomio caratteristico
- In base a quante radici reali ha ho delle soluzioni standard dell'equazione differenziale di secondo grado:

RADICI REALI	DELTA	RADICI	SOLUZIONE DELL'EQUAZ. DIFF.
2 distinte	$> 0$	$\lambda_1 \neq \lambda_2$	$v(z) = C_1 e^{\lambda_1 z} + C_2 e^{\lambda_2 z}$
2 coincidenti	$= 0$	$\lambda_1 = \lambda_2$	$v(z) = (C_1 + C_2 z) e^{\lambda z}$
nessuna	$< 0$	$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$v(z) = e^{\alpha z} (C_1 \cos(\beta z) + C_2 \sin(\beta z))$

Per trovare la freccia in un punto, quindi, basta risolvere l'omogenea associata alla rispettiva equazione della linea elastica e, aggiungere la curvatura alla soluzione omogenea. Questo corrisponde ad una traslazione della soluzione dell'equazione differenziale.

Risoluzione di un'equazione differenziale di 1° grado omogenea:

$$\frac{dv(z)}{dz} + a(z) \cdot v(z) = b(z)$$

- Moltiplico ambo i membri per una funzione

$$e^{-A(z)}$$

Dove  $A(z)$  è una primitiva di  $a(z)$

- Raggruppo tutto nella forma

$$\frac{[e^{-A(z)} \cdot v(z)]}{dz} = e^{-A(z)} b(z)$$

- Integro e scrivo la costante  $C$

-----

### Criterio di resistenza di Von Mises (materiali duttili):

La tensione ideale massima di Von Mises deve essere inferiore a quella ammissibile:

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x\sigma_z - \sigma_y\sigma_x - \sigma_y\sigma_z + 3\tau_{xy}^2 + 3\tau_{yz}^2 + 3\tau_{xz}^2} \leq \sigma_{amm}$$

In genere, è utilizzato soprattutto per l'acciaio, e si pone  $\sigma_z = 0$ , pertanto il criterio diventa

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_y\sigma_x + 3\tau_{xy}^2} \leq \sigma_{amm}$$

---

### Criterio di resistenza di Mohr-Coulomb (materiali fragili):

I cerchi di Mohr che caratterizzano la sollecitazione del solido devono essere al più tangenti alla retta:

$$|\tau_{max}| = c - \sigma \tan(\varphi)$$

Dove  $\varphi$  è l'angolo di attrito interno,  $c$  è la coesione e  $\sigma$  è la tensione normale sul piano. In realtà è possibile anche sostituire la retta con una funzione più complicata ed attendibile (criterio di Coulomb).

---

### Teorema Statico dell'analisi limite:

*La struttura non perviene al collasso sotto un sistema di carichi in corrispondenza del quale esista un insieme di azioni interne in equilibrio con i carichi ed all'interno del dominio di ammissibilità.*

---

### Teorema Cinematico dell'analisi limite:

*La struttura certamente collassa sotto un sistema di carichi a cui è associata una potenza esterna più grande della potenza dissipata in corrispondenza ad un potenziale meccanismo di collasso.*

### Riassunto formule generali:

$$N = \int_A \sigma_z dA \neq 0$$

$$M_x = \int_A \sigma_z y dA \neq 0$$

$$M_y = \int_A \sigma_z x dA \neq 0$$

$$e_x = \frac{M_x}{N} \qquad e_y = -\frac{M_y}{N}$$

### Jourawski:

$$\tau_{zs} = \frac{T_y S_x^{A'}}{I_x b} + \frac{T_x S_y^{A'}}{I_y b}$$

$$\gamma_x = \frac{t_x T_x}{G A} + \frac{t_{xy} T_y}{G A}$$

$$\gamma_y = \frac{t_{xy}T_x}{G A} + \frac{t_yT_y}{G A}$$

Torsione Sez. Rettangolare:

$$\theta = \frac{M_z}{G I_t}$$

$$I_t = \beta a b^3$$

$$\tau_{zx} = \frac{M_z}{I_t} y$$

$$\tau_{zy} = \frac{M_z}{I_t} x$$

a/b	1	1.5	2	3	10	$\infty$
$\beta$	0.141	0.196	0.229	0.263	0.312	1/3

Legame elastico costitutivo congruente con ipotesi di Eulero (sempre valido)

$$-\frac{M_x}{E I_x} \cong \frac{d^2v}{dz^2}$$

Equazione della linea elastica **con** effetti del second' ordine (cioè  $\alpha \neq 0$ ):

$$\frac{d^2M_x}{dz^2} + \alpha \frac{d^2v}{dz^2} - \frac{q(z)}{E I_x} = 0$$

$$\alpha = \frac{P}{E I_x}$$

Se  $q=\text{costante}$

$$v(z) = A \cos(\alpha z) + B \sin(\alpha z) + Cz + D + \frac{qz^2}{2N}$$

Momento elastico limite:  $M_{el,y} = f_{yk} \cdot W_{el,y}$

Momento ultimo limite:  $M_{pl,y} = M_{u,y} = f_{yk} \cdot W_{pl,y}$

Il **modulo di resistenza elastico** è definito come quanto scritto prima, cioè è il rapporto fra il momento d'inerzia rispetto ad un asse e la massima distanza di un punto della sezione da tale asse, mentre il **modulo di resistenza plastico** è definito come la somma dei momenti statici rispetto all'asse interessato.

Criterio di Von Mises

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x\sigma_z - \sigma_y\sigma_x - \sigma_y\sigma_z + 3\tau_{xy}^2 + 3\tau_{yz}^2 + 3\tau_{xz}^2} \leq \sigma_{amm}$$

Criterio di Mohr-Coulomb

$$|\tau_{max}| = c - \sigma \tan(\varphi)$$