DISPENSA DI GEOMETRIA DELLE MASSE

(Andrea Albero)

IPOTESI GENERALI PER LA GEOMETRIA DELLE MASSE E LA SCIENZA DELLE COSTRUZIONI:

- Materiale omogeneo
- Densità del materiale uniforme, costante ed unitaria *(al posto di A, a rigore dovremmo mettere la massa, cioè densità moltiplicata l'area: supponendo una densità costante, unitaria ed uniforme questa può essere omessa riducendo i problemi a problemi geometrici di area)*

Teorema di Varignon:

"Un sistema di vettori le cui rette d'azione concorrano in uno stesso punto O è equivalente alla risultante del sistema applicata nel medesimo punto O. E, viceversa, un vettore applicato in un punto O può sempre essere scomposto in un sistema equivalente di n vettori applicati nello stesso punto"

Baricentro "G" di un'area "A":

Punto le cui coordinate sono il rapporto fra il momento statico rispetto all'asse X e Y e l'area cui ci si riferisce. Queste due grandezze possono essere opportunamente modificate per tenere conto di un materiale disomogeneo: ad esempio, nel c.a., si considerano le armatura come aree *n* volte maggiori di quella effettive, concentrate nel baricentro di ogni singola barra d'armatura.

$$X_g = \frac{S_y}{A} \qquad\qquad Y_g = \frac{S_x}{A}$$

Momento d'Inerzia:

È l'integrale di un area per una distanza da un certo asse. L'ordine del momento rappresenta la distanza quante volte viene calcolata.

Primo Ordine (Momento Statico):

$$S_y = \int_A x \; dA$$

$$S_x = \int_A y \; dA$$

Secondo Ordine (Momento d'Inerzia propriamente detto):

$$I_{yy} = J_y = \int_A x^2 \; dA$$

$$I_{xx} = J_x = \int_A y^2 \; dA$$

$$I_{xy} = J_{yx} = \int_A xy \; dA \qquad \textit{(centrifugo)}$$

$$I_o = J_o = \int_A d^2 \; dA \qquad \textit{(polare rispetto ad un punto O)}$$

Proprietà dei momenti d’inerzia:

- Il momento polare rispetto ad un punto O è uguale alla somma dei momenti d’inerzia di due assi concorrenti in O
- **Teorema di trasposizione (Huygens-Steiner):** il momento d’inerzia di un asse **a** è uguale al momento d’inerzia di un asse **b (//a)** passante per il baricentro, **più** la massa totale moltiplicata per la distanza al quadrato fra **a** e **b**:

$$I_a = I_b + M \cdot d^2$$

- Sono **assi principali d’inerzia** gli assi ortogonali ξ e η, che hanno la particolarità di concorrere nel baricentro **G** ed avere il momento centrifugo nullo. I **momenti d’inerzia** rispetto agli assi principali sono uno **massimo** ed uno **minimo.** **<u>Se una sezione presenta un asse di simmetria, tale asse di simmetria è anche un asse principale d’inerzia</u>.**

Modulo di resistenza rispetto ad un asse baricentrico:

È il rapporto fra un momento d’inerzia baricentrico e la massima distanza di un punto dell’area rispetto all’asse in oggetto. Come conseguenza della definizione di momento principale d’inerzia, i moduli di resistenza principali sono uno massimo ed uno minimo.

$$W_x = \frac{J_x}{y_{max}} \qquad W_y = \frac{J_y}{x_{max}}$$

Raggio d’inerzia (o giratore) lungo un asse baricentrico:

Il suo quadrato è pari al rapporto fra il momento d’inerzia baricentrico e l’area totale. Come conseguenza della definizione di momento principale d’inerzia, i raggi d’inerzia principali sono uno massimo ed uno minimo.

$$\rho_x^2 = \frac{J_x}{A} \qquad \rho_y^2 = \frac{J_y}{A}$$

Ellisse centrale d’inerzia:

È l’ellisse baricentrica che ha come semiassi i raggi principali d’inerzia. La sua espressione è:

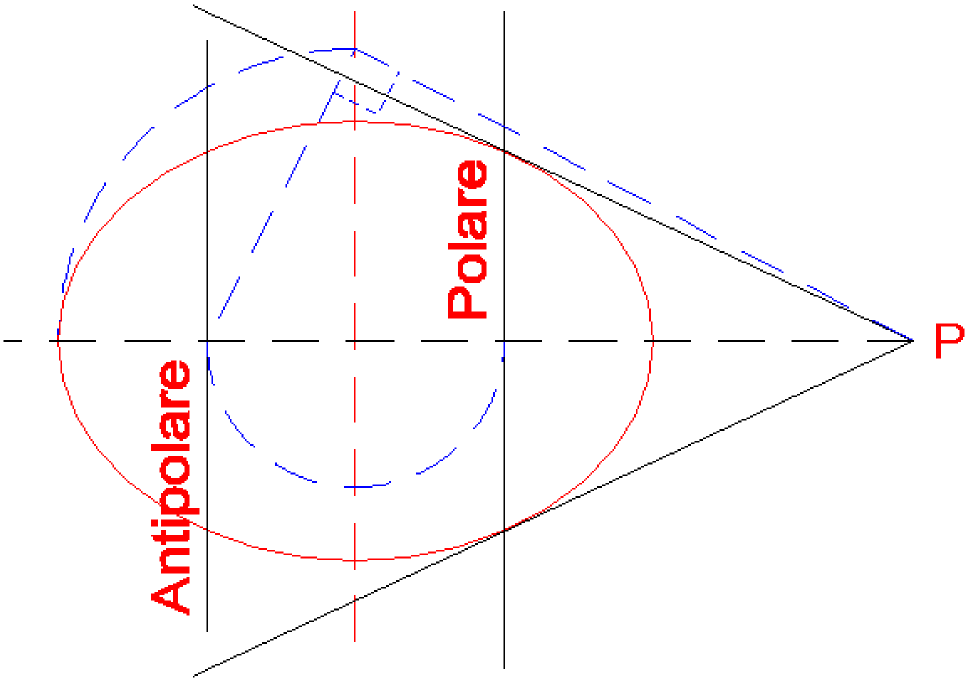
$$\frac{\xi^2}{\rho_\xi^2} + \frac{\eta^2}{\rho_\eta^2} = 1$$

L’ellisse centrale d’inerzia è particolarmente utile per vedere visivamente le caratteristiche inerziali della sezione lungo le varie direzioni.

Antipolare di un punto “P” di coordinate (ξ_p, η_p) rispetto all’ellisse centrale d’inerzia

(per ottenere la polare basta cambiare -1 con +1):

$$\frac{\xi_p \cdot \xi}{\rho_\xi^2} + \frac{\eta_p \cdot \eta}{\rho_\eta^2} = -1$$



Rette coniugate:

"*Due rette r, s si dicono coniugate rispetto alla conica se ciascuna delle due passa per il polo dell'altra; una retta r ha infinite rette coniugate che formano il fascio che ha centro nel polo di r. La retta r si dice autoconiugata se contiene il suo polo e perciò è coniugata di se stessa; le rette autoconiugate sono tutte e sole le rette tangenti alla conica e il loro polo è il punto di contatto con la conica."*

Centro relativo di una retta:

Se ho due rette X ed Y, i centri relativi rispetto al baricentro G sono dati dal calcolo dei baricentri dei momenti statici lungo le due direzioni delle due rette: in pratica, se scelgo ad esempio di schematizzare l'area della mia sezione come momenti statici lungo Y *(quindi in pratica dA = ydA, dove y è il baricentro di dA)* otterrò:

$$y_x = \frac{J_x}{S_x} = \frac{\rho_{xo}^2}{y_G} + y_G$$

$$x_x = \frac{J_{xy}}{S_x}$$

Viceversa, ponendo *dA = xdA:*

$$y_y = \frac{J_{yx}}{S_y}$$

$$x_y = \frac{J_y}{S_y} = \frac{\rho_{yo}^2}{x_G} + x_G$$

Questi sono i centri relativi delle due rette, ciascuno per ogni direzione. Se scegliessi rette baricentriche, otterrei dei punti all'infinito. Si può notare che il centro relativo di una retta lungo l'altra direzione è sempre più lontano del baricentro G.

Relazione di coniugio:

Deriva dalla definizione di centro relativo di una retta lungo una data direzione: infatti, si può notare che

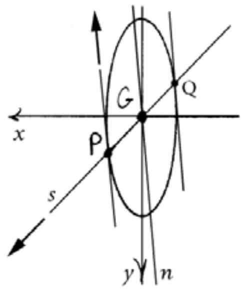
$$x_x S_x = y_y S_y$$

Se inoltre ogni retta contiene il centro relativo dell'altra retta, allora sono dette coniugate *(teorema di reciprocità).*

Più banalmente, due rette sono dette **coniugate** se il momento centrifugo relativo alle due rette è nullo.

Proprietà dell'ellisse centrale d'inerzia:

- *Tangenti:* una retta baricentrica "s" che taglia l'ellisse centrale d'inerzia, ha come retta coniugata una retta "n" baricentrica che ha come direzione la tangente all'ellisse nei punti in cui questa è tagliata da "s"
- *Semidiametri:* due rette baricentriche coniugate "s" ed "n" individuano sull'ellisse centrale d'inerzia due semidiametri lungo "n" ed "s", la cui lunghezza corrisponde ai rispettivi raggi d'inerzia *(lungo "s" trovo il raggio d'inerzia relativo all'asse "n" e viceversa)*



Nocciolo centrale d'inerzia:

È il luogo degli antipoli rispetto all'ellisse centrale d'inerzia delle rette tangenti alla sezione data. In particolare:

- se il contorno della sezione presenta un vertice, allora in corrispondenza il contorno del nocciolo presenterà un tratto rettilineo.
- se il contorno della sezione presenta un tratto rettilineo, allora in corrispondenza il contorno del nocciolo presenterà un vertice.
- se la sezione è un poligono allora lo è anche il nocciolo ed ha lo stesso numero di lati.
- il nocciolo è sempre convesso.
- il nocciolo ha le stesse proprietà di simmetria della sezione.

Inoltre:

- Se il centro di pressione "C" è interno al nocciolo, l'asse neutro "n" è esterno alla sezione *(sollecitata uniformemente)*
- Se il centro di pressione "C" è sul bordo del nocciolo, l'asse neutro è tangente alla sezione *(sollecitata uniformemente)*
- Se il centro di pressione "C" è esterno al nocciolo, l'asse neutro è interno alla sezione e si ha una sezione *"parzializzata"*.

Ipotesi: si ha a che fare con dei solidi di De Saint-Venant.

Centro di sollecitazione "C":

Punto in cui se applico uno sforzo normale N ottengo ad uno stato di sollecitazione composto da N, M_x e M_y. È anche possibile data una terna sollecitante trovare il centro di sollecitazione. La sua distanza dal baricentro **G** è espressa da e_x ed e_y:

$$e_x = \frac{M_x}{N} \qquad e_y = -\frac{M_y}{N}$$

È l’antipolo dell’asse neutro “n” rispetto all’ellisse centrale d’inerzia.

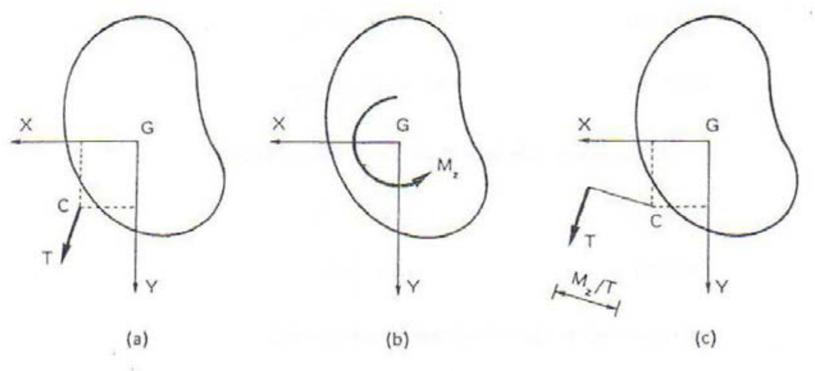
Centro di torsione “T”:

È il baricentro delle risultanti delle tensioni tangenziali agenti sulla sezione. Se il taglio passa per tale punto, allora la torsione nel solido di S.V. è nulla

È possibile trovare il centro di torsione per tentativi: si ipotizza ad esempio un taglio tentativo T_1 qualunque, e si impone che il momento del taglio rispetto ad un punto incognito sia uguale a M_z:

$$T_1\,\delta_1 = M_z = \int_A (\tau_{zy}\,x + \tau_{zx}\,y)dA$$

Tale distanza δ_1 mi identifica la distanza di una retta parallela a quella del taglio tentativo, su cui giace il centro di torsione. Ripetiamo la stessa operazione per un taglio T_2, otteniamo un’altra retta parallela a T_2, e l’intersezione fra queste due rette su cui giace il centro di torsione è il centro di torsione stesso.



Il centro di torsione è una proprietà geometrica della sezione indipendente dalle c.d.s., e giace sugli assi di simmetria della sezione, pertanto:

- Se la sezione ha un solo asse di simmetria, il centro di torsione giace su tale asse
- Se la sezione ha due o più assi di simmetria, il centro di torsione giace sull’intersezione tra questi assi

Piano di sollecitazione:

Piano lungo cui agisce il momento M, somma delle componenti M_x ed M_y. M è un vettore ortogonale al piano di sollecitazione, e quindi anche alla sua traccia.

Asse di sollecitazione “s”:

Retta che passa per C e G. È la traccia del piano di sollecitazione sulla sezione di studio.

Asse neutro “n”:

Luogo dei punti (retta) dove la tensione normale alla sezione è nulla. È l’antipolare del centro di sollecitazione “C” rispetto all’ellisse centrale d’inerzia.

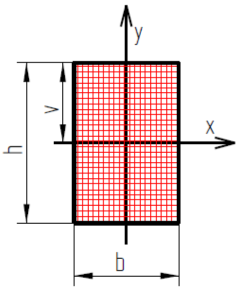
Asse di flessione “f”:

Asse perpendicolare all’asse neutro. Quando è parallelo ad “s”, si ha flessione retta, altrimenti si ha flessione deviata, che è la somma di due flessioni rette.

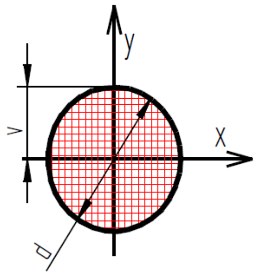
Relazione di coniugio:

l’asse neutro “n” è l’asse neutro corrispondente all’asse di sollecitazione “s” solo se il momento centrifugo $\boldsymbol{J_{ns} = 0}$.

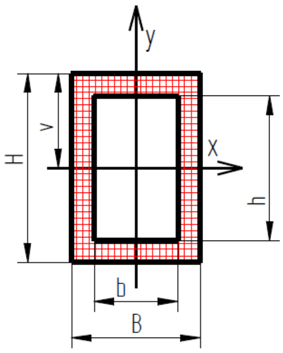
Figure elementari e riassunto:

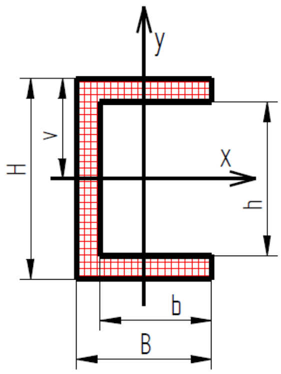


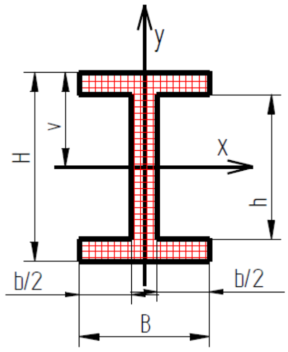
$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12}$$
$$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6}$$
$$v = \frac{h}{2}$$



$$I_x = \frac{\pi \cdot d^4}{64}$$
$$W_x = \frac{\pi \cdot d^3}{32}$$
$$v = \frac{d}{2}$$







$$I_x = \frac{BH^3 - bh^3}{12}$$
$$W_x = \frac{BH^3 - bh^3}{6H}$$
$$v = \frac{H}{2}$$

	Formule generali	*Formule semplificate (sez. rett.)*	
Baricentro:	$X_g = \frac{S_y}{A}$	$X_g = \frac{B}{2}$	$Y_g = \frac{H}{2}$
Momento Statico:	$S_y = \int_A x \ dA$	$S_x = \frac{BH^2}{2}$	$Y_g = \frac{B^2H}{2}$
Momento d’Inerzia:	$I_{yy} = J_y = \int_A x^2 \ dA$	$I_x = \frac{BH^3}{12}$	$I_g = \frac{B^3H}{12}$
Momento Centrifugo:	$I_{xy} = J_{yx} = \int_A xy \ dA$		
Momento Polare:	$I_o = J_o = \int_A x^2 + y^2 \ dA$		
Teorema di Huygens:	$I_a = I_b + A \cdot d^2$		
Modulo di Resistenza:	$W_x = \frac{J_x}{y_{max}}$		
Raggio d’Inerzia:	$\rho_x^2 = \frac{J_x}{A}$		
Centro Relativo:	$y_x = \frac{J_x}{S_x} = \frac{\rho_{xo}^2}{y_G} + y_G$ $x_x = \frac{J_{xy}}{S_x}$		

Ellisse centr. Inerz.: $\frac{\xi^2}{\rho_\xi^2} + \frac{\eta^2}{\rho_\eta^2} = 1$

Antipol. di "P” risp. Elliss.: $\frac{\xi_p \cdot \xi}{\rho_\xi^2} + \frac{\eta_p \cdot \eta}{\rho_\eta^2} = -1$

Eccentricità: $e_x = \frac{M_x}{N}$

Centro di Taglio: $T_1\, \delta_1 = M_z = \int_A (\tau_{zy}\, x + \tau_{zx}\, y) dA$